Ueber

gewisse Systeme von Kegelschnitten, welche mit einer gegebenen Ellipse eine Berührung zweiter Ordnung haben.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht von

Eduard Rosenstock

aus Frankenberg.

MARBURG.

Druck von C. L. Pfeil.

1878.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554412_0173

In Crelles Journal Bd. 32, pag. 300 veröffentlichte Steiner folgenden Satz:

> Par un point quelconque P_0 d'une ellipse passent trois circonférences de cercle osculatrices à trois autres points P', P'', P''' de la conique; les quatre points P_0, P', P'', P''' sont situés sur une circonférence de cercle.

Joachimsthal lieferte später in demselben Journal, Bd. 36, pag. 95, einen geometrischen Beweis, der sich streng genommen nur auf den letzten Theil des Steiner'schen Theorems bezieht und darauf beruht, dass vier Punkte eines Kegelschnitts auf einem Kreis liegen, wenn zwei nicht benachbarte Verbindungslinien derselben entgegengesetzt gleiche Winkel mit den Axen bilden. Am Schluss entwickelt Joachimsthal die analytische Bedingung dafür, dass drei Krümmungskreise einer Ellipse sich in demselben Punkt der Curve durchschneiden, in der Form

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2m\pi,$$

wo unter α, β, γ, δ die sog. excentrischen Anomalien der drei Osculationspunkte und des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes und unter m eine ganze Zahl zu verstehen sind.

Der angegebene Steiner'sche Satz lässt sich in mehrfacher Weise verallgemeineren.

Auf Veranlassung meines hochverehrten Lehrers, des Herrn Professor Dr. v. Drach, habe ich im Nachstehenden eine Untersuchung durchgeführt über die Modification dieses Satzes, wenn an die Stelle der Osculationskreise beliebige osculirende Kegelschnitte treten, die zu dem Resultat geführt hat, dass auch für diese, falls ihre Axen denen der Ellipse parallel sind, das System der Punkte P_0, P', P'', P''' dasselbe ist, wie bei den Kreisen, ein Resultat, das insofern bemerkenswerth ist, als man nach der durch

das Princip der Continuität aus unserem Satze sich ergebenden Verallgemeinerung desselben, die sich in Salmon-Fiedler Art. 415 findet und folgendermassen lautet:

„Durch einen Punkt in der Peripherie eines Kegelschnitts und durch zwei beliebige Punkte seiner Ebene lassen sich immer 3 Kegelschnitte legen, welche mit dem gegebenen eine Berührung 2. Ordnung haben, und die Berührungspunkte liegen mit den drei angenommenen Punkten auf einem Kegelschnitt".

nur zu erwarten gehabt hätte, dass z. B., wenn durch den beliebigen Punkt Q_0 einer Ellipse drei gleichseitige Hyperbeln gelegt werden, deren Axen zu denen der Ellipse parallel sind, und welche die Ellipse in den Punkten Q', Q'', Q''' osculiren, die Punkte Q_0, Q', Q'', Q''' auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen, deren Axen zu denen der Ellipse parallel sind.

Im Folgenden gebe ich zunächst die Untersuchung über die Kegelschnitte, welche mit einer Ellipse in einem Punkt P' eine Berührung 2. O. haben und durch einen gewissen Punkt P_0 derselben gehen; sodann werden drei Systeme osculirender Kegelschnitte untersucht, welche durch den Punkt P_0 bedingt sind; schliesslich folgen einige Sätze über das Dreieck der Berührungspunkte P', P'', P'''.

I.

Wenn

$$S = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnitts,

$$T = 0,\ U = 0$$

die Gleichungen zweier Geraden sind, so stellt bekanntlich die Gleichung

$$kS - T.U = 0$$

einen Kegelschnitt dar, welcher durch die vier den Geraden $T = 0$ und $U = 0$ mit dem Kegelschnitt $S = 0$ gemeinsamen Punkte geht. — Ist nun $T = 0$ die Gleichung der Tangente des Kegelschnitts $S = 0$ in einem gegebenen Punkt P' (x', y') und $U = 0$ die Gleichung einer beliebigen durch diesen Punkt gehenden Geraden, so fallen drei von jenen vier Punkten in einen Punkt

P′ zusammen, und die Gleichung $kS - T.U = 0$ repräsentirt einen Kegelschnitt, welcher mit $S = 0$ im Punkt P′ eine Berührung 2. O. hat.

Es sei nun unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten:

$$(1) \qquad S \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse, dann ist:

$$(2) \qquad T \equiv b^2x'.x + a^2y'.y - a^2b^2 = 0$$

die Gleichung der Tangente im Punkt P′ (x', y') und

$$(3) \qquad U \equiv m'(x - x') - (y - y') = 0$$

die Gleichung einer beliebigen durch P′ gehenden Geraden. Nach dem Obigen repräsentirt daher die Gleichung:

$$(4) \qquad k(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) - (b^2x'.x + a^2y'.y - a^2b^2)\{m'(x - x') - (y - y')\} = 0$$

alle Kegelschnitte, welche mit der Ellipse im Punkt P′ eine Berührung 2. O. haben, unter welchen auch (für $k = \infty$) die Ellipse selbst vorkommt.

Die Gleichung (4) enthält zwei unbestimmte Parameter k und m′, über welche wir beliebig verfügen können. Von diesen bedeutet m′, wie aus Gl. (3) hervorgeht, die trigonometrische Tangente des Winkels, den die gemeinschaftliche Sehne der Kegelschnitte (4) und der Ellipse mit der Abscissenaxe bildet. Sobald daher m′ einen bestimmten Werth erhält, während k unbestimmt bleibt, schneiden sich alle durch Gl. (4) repräsentirten Kegelschnitte in einem bestimmten Punkt P_0 der Ellipse.

Unter den verschiedenen Werthen, welche dem m′ beigelegt werden können, ist derjenige ausgezeichnet, welcher das Glied in xy der Gl. (4) zum Verschwinden bringt. Denn es zeigt das Fehlen dieses Gliedes, dass die Axen der Kegelschnitte (4) den Coordinatenaxen, also hier den Hauptaxen der Ellipse, parallel sind, und es wird zu *diesem* System auch der *Krümmungskreis* gehören müssen, als dessen Axen man zwei beliebige, also auch die zu den Axen der Ellipse parallelen Durchmesser ansehen kann.

Aus der angegebenen Bedingung:

$$m'a^2y' - b^2x' = 0$$

folgt für m' der Werth:

$$(5) \qquad m' = \frac{b^2x'}{a^2y'}.$$

Bezeichnen wir den Winkel, welchen die Tangente der Ellipse in P' mit der Abscissenaxe bildet, mit τ', so ist

$$\operatorname{tang} \tau' = -\frac{b^2x'}{a^2y'},$$

also haben wir auch

$$(6) \qquad m' = -\operatorname{tang} \tau'.$$

Es bilden also die von P' ausgehenden Geraden $T = 0$ und $U = 0$ in dem von uns angenommenen Fall, dass die Axen der die Ellipse osculirenden Kegelschnitte denen der Ellipse parallel sind, supplementäre Winkel mit der grossen Axe der Ellipse.

Substituiren wir nun den Werth für m' aus (5) in (4) und ordnen die Gleichung, so erhalten wir:

$$(7) \quad \left.\begin{aligned} b^2(a^2ky' - b^2x'^2).x^2 + a^2(a^2ky' + a^2y'^2).y^2 + 2b^4x'^3.x - \\ 2a^4y'^3.y - a^2b^2(a^2ky' + b^2x'^2 - a^2y'^2) = 0 \end{aligned}\right\}$$

und es lässt sich das bisher Erörterte in folgendem Satz zusammenfassen:

> *„Alle Kegelschnitte, welche mit einer gegebenen Ellipse in einem beliebigen Punkt P' eine Berührung 2. O. haben, und deren Axen denen der Ellipse parallel sind, schneiden sich in einem bestimmten Punkt P_0 der Ellipse, welchen man erhält, wenn man eine durch den Berührungspunkt P' antiparallel der Tangente in diesem Punkt gegen die grosse Axe der Ellipse gezogene Gerade bis zum Durchschnitt mit der Ellipse verlängert.“*

Um die Coordinaten des Punktes P_0 zu erhalten, können wir zwischen der Gleichung der Ellipse (1) und Gl. (7) auflösen. Eliminiren wir y und entwickeln die ersten Glieder der Eliminationsgleichung, so erhalten wir:

$$(8) \qquad x^4 - \frac{4x'^3}{a^2} x^3 + \ldots = 0$$

Da nun die Kegelschnitte (7) mit der Ellipse in P′ drei zusammenfallende Punkte gemein haben, so ist x′ als (bekannte) dreifache Wurzel der Gl. (8) zu betrachten. Bezeichnen wir daher die gesuchte Abscisse von P_0 mit x_0, so haben wir nach einem bekannten Satz aus der Theorie der Gleichungen:

$$x_0 + 3x' = \frac{4x'^3}{a^2},$$

also:
$$x_0 = \frac{4x'^3}{a^2} - 3x' \Bigg| \qquad (9)$$

ebenso folgt:
$$y_0 = \frac{4y'^3}{b^2} - 3y' \Bigg|$$

Nach den verschiedenen Werthen, welche man dem unbestimmten Parameter k der Gl. (7) beilegt, erhält man die Gleichungen einzelner Kegelschnitte der durch diese Gleichung repräsentirten Schaar. Damit ins Besondere Gl. (7) einen Kreis, den *Krümmungskreis*, vorstelle, muss

$$b^2(a^2ky' - b^2x'^2) = a^2(a^2ky' - a^2y'^2)$$

sein, woraus für k folgt:

$$k = -\frac{b^4x'^2 + a^4y'^2}{a^2c^2.y'}, \quad \text{wobei } c^2 = a^2 - b^2$$

Substituiren wir diesen Werth in (7), so erhalten wir die bekannte Gleichung des Krümmungskreises:

$$(10) \qquad \left(x - \frac{c^2x'^3}{a^4}\right)^2 + \left(y + \frac{c^2y'^3}{b^4}\right)^2 - \frac{(b^4x'^2 + a^4y'^2)^3}{a^4b^4} = 0$$

Zu der Schaar (7) gehört ferner eine *gleichseitige Hyperbel*, als deren Gleichung wir

$$(11) \qquad \left(x - \frac{e^2x'^3}{a^4}\right)^2 - \left(y - \frac{e^2y'^3}{b^4}\right)^2 - \frac{(b^4x'^2 - a^4y'^2)^3}{a^4b^4} = 0$$

erhalten, wobei $a^2 + b^2 = e^2$ gesetzt ist.

Soll Gl. (7) eine Parabel repräsentiren, so muss:

$$b^2(a^2ky' - b^2x'^2).a^2(a^2ky' + a^2y'^2) = 0$$

sein, und erhält man demnach zwei Werthe für k, also auch *zwei Parabeln*, deren Axen aufeinander senkrecht stehen. Ihre Gleichungen sind

$$\text{für } k = \frac{b^2x'^2}{a^2y'^2} : \left(y - \frac{y'^3}{b^2}\right)^2 = -\frac{b^2x'^3}{a^4}\left(x - \frac{3a^2x' - x'^3}{2a^2}\right) \quad (12)$$

$$\text{und für } k = -y' : \left(y - \frac{3b^2y' - y'^3}{2b^2}\right)^2 = -\frac{a^2y'^3}{b^4}\left(x - \frac{x'^3}{a^2}\right) \quad (13)$$

Für $k = \infty$ erhält man, wie schon bemerkt, die Gleichung der *Ellipse* (1) selbst und für $k = 0$ die Gleichungen der *beiden Geraden* T und U.

An die Gl. (7) knüpft sich die Frage nach dem *Ort der Mittelpunkte* aller Kegelschnitte dieses Systems. Nennen wir die Coordinaten der betreffenden Mittelpunkte g und h, so erhalten wir für dieselben aus Gl. (7) sofort die Werthe:

$$(14) \qquad g = -\frac{b^2x'^3}{a^2ky' - b^2x'^2}, \quad h = \frac{y'^2}{k + y'}$$

und durch Elimination von k folgt, wenn wir x und y für g und h schreiben, als Gleichung des gesuchten Orts:

$$(15) \qquad xy - \frac{y'^3}{b^2}x - \frac{x'^3}{a^2}y = 0$$

Es ist dies die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunkt die Coordinaten

$$(15\alpha) \qquad \xi = \frac{x'^3}{a^2}, \quad \eta = \frac{y'^3}{b^2}$$

besitzt. Vergleichen wir diese Werthe mit den Scheitelcoordinaten der beiden Parabeln (12) & (13), so finden wir, dass ξ gleich der Scheitelabscisse der Parabel (13) und η gleich der Scheitelordinate der Parabel (12) ist. — Transformiren wir Gl. (15) zu parallelen Axen auf den Mittelpunkt der Curve, so ergibt sich:

$$x.y = \xi.\eta$$

Aus der Gestalt dieser Gleichung geht hervor, dass sie die Asymptotengleichung der gleichseitigen Hyperbel ist. Die Asymptoten sind also parallel den Axen der Ellipse (1) und die Axen der Hyperbel (15) somit unter 45° gegen die der Ellipse geneigt. Da ferner der Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel (15) mit dem Durchschnittspunkt der Axen der beiden Parabeln (12) und (13) zusammenfällt, so fallen auch die Asymptoten dieser Hyperbel mit denselben Parabelaxen zusammen, — in Uebereinstimmung damit, dass die Hyperbel durch die im Unendlichen auf den Axen liegenden Mittelpunkte der Parabeln geht.

Da wir nach dem Früheren die beiden von P′ ausgehenden Geraden T und U als einen zu der Schaar (7) gehörigen Kegelschnitt zu betrachten haben, der seinen Mittelpunkt in P′ hat, so geht die Hyperbel (15) auch durch diesen Punkt der Ellipse. Bilden wir nun die Gleichung der Tangente der Hyperbel (15) in diesem Punkt, so erhalten wir:

$$\eta - y' = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}(x - x')$$

oder

$$b^2 x' . x + a^2 y' . y - a^2 b^2 = 0.$$

Man bemerkt sofort, dass diese Gleichung identisch ist mit der Tangentengleichung der Ellipse, es berühren sich daher beide Kegelschnitte in P′.

Wie man sich leicht überzeugt, genügen die Mittelpunktscoordinaten (15 α) der Hyperbel (15) der Gleichung der Geraden $\overline{P'P_0}$

$$y - y' = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}(x - x');$$

um jedoch die Lage dieses Punktes auf dieser Geraden noch näher zu bestimmen, stellen wir die Werthe der Coordinaten desselben in folgender Weise dar:

$$\xi = \frac{x'^3}{a^2} = \frac{\frac{4x'^3}{a^2} - 3x' + 3x'}{4} = \frac{1.x_0 + 3x'}{1+3} \Bigg\} \text{ vgl. Gl. (9)}$$

Ebenso

$$\eta = \frac{1.y_0 + 3y'}{1+3}, \Bigg\}$$

Aus der Gestalt dieser Ausdrücke folgt nach der Theorie des Theilpunkts, dass der Mittelpunkt (ξ, η) der Hyperbel (15) die Gerade $\overline{P'P_0}$ im Verhältnis 1:3 theilt.

Ausser dem schon angeführten Punkt P' kennen wir noch drei endliche Punkte durch welche die in Rede stehende Hyperbel gehen muss, nämlich die Mittelpunkte der Ellipse (1), des Krümmungskreises (10) und der gleichseitigen Hyperbel (11). Zu diesen liefert ein Satz von Jacobi noch einen fünften Punkt. Derselbe lautet: „Der Ort des Centrums eines Kegelschnitts, der durch vier feste Punkte geht, ist ein Kegelschnitt, welcher durch den Durchschnittspunkt jedes der drei Linienpaare geht, welche durch die vier Punkte gezogen werden, und durch die Mittelpunkte dieser Linien." In unserem Fall, wo drei der gegebenen Punkte zusammenfallen, fallen zwei der Verbindungslinien in die Gerade $\overline{P'P_0}$; nach dem angeführten Satz muss also die Hyperbel durch den Halbirungspunkt dieser Geraden gehen, wovon man sich auch durch Substitution der Coordinaten dieses Punktes:

$$x = \frac{2x'^3}{a^2} - x', \quad y = \frac{2y'^3}{b^2} - y'$$

in Gl. (15) leicht überzeugt. — Die übrigen durch diesen Satz bestimmten Punkte (zwei in P' zusammenfallende und zwei unendlich entfernte) sind oben auf andere Weise schon gefunden.

Die bemerkenswerthesten Eigenschaften des untersuchten Orts lassen sich kurz in Folgendem zusammenfassen:

> *„Der Ort des Centrums eines Kegelschnitts, der mit einer Ellipse in einem Punkt P' eine Berührung 2. O. hat, und dessen Axen denen der Ellipse parallel sind, ist eine gleichseitige Hyperbel, deren Axen unter 45° gegen die der Ellipse geneigt sind. Dieselbe berührt die Ellipse in P', geht durch das Centrum der Ellipse und durch den Mittelpunkt der gemeinschaftlichen Sehne $\overline{P'P_0}$ der Ellipse und der osculirenden Kegelschnitte, während ihr Mittelpunkt diese Sehne im Verhältnis 1 : 3 theilt."*

II.

Im vorhergehenden Abschnitt sahen wir den Berührungspunkt P′ als gegeben an und fragten nach dem Durchschnittspunkt P_0 des in P′ osculirenden Systems mit der Ellipse. Betrachten wir umgekehrt P_0 als gegeben, so bietet sich uns folgende Frage dar: *Wieviel Systeme von Kegelschnitten, welche mit einer gegebenen Ellipse eine Berührung 2. O. haben, und deren Axen denen der Ellipse parallel sind, lassen sich durch einen gegebenen Punkt P_0 der Ellipse legen?*

Um diese Frage zu beantworten, haben wir nur nöthig, in den Relationen (9) x_0 und y_0 als gegeben zu betrachten und nach x′ und y′ aufzulösen.

Die Auflösung wird wesentlich einfacher, wenn wir statt der Coordinaten der Ellipsenpunkte deren excentrische Anomalien einführen und diejenige des Punkts P_0 negativ und zwar $= 3\vartheta$ annehmen. Bezeichnen wir ferner die Anomalie des gesuchten Punkts durch u, so haben wir zu substituiren:

$$(16)\qquad \begin{cases} x_0 = a\cos 3\vartheta \\ y_0 = -b\sin 3\vartheta \end{cases} \qquad (17)\qquad \begin{cases} x' = a.\cos u \\ y' = b.\sin u \end{cases}$$

Hierdurch gehen die Gll. (9) über in:

$$\begin{cases} \cos 3\vartheta = 4\cos^3 u - 3\cos u \\ -\sin 3\vartheta = 4\sin^3 u - 3\sin u \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} \cos 3\vartheta = \cos 3u \\ \sin 3\vartheta = \sin 3u \end{cases}$$

Demnach ist, wenn m eine ganze Zahl bedeutet,

$$3u = 3\vartheta + 2m\pi,$$

woraus für u drei verschiedene Werthe folgen:

$$u' = \vartheta, \qquad u'' = \vartheta + 120^0, \qquad u''' = \vartheta + 240^0$$

Wir erhalten somit, wenn wir diese Werthe in (17) einsetzen und die aus dieser Substitution hervorgehenden Coordinaten mit x′, y′; x″, y″; x‴, y‴ bezeichnen, folgende *drei Werthe* für die Coordinaten der gesuchten Berührungspunkte:

$$(18)\quad \begin{cases} x' = a\cos\vartheta & x'' = a\cos(\vartheta + 120^0) & x''' = a\cos(\vartheta + 240^0) \\ y' = b\sin\vartheta & y'' = b\sin(\vartheta + 120^0) & y''' = b\sin(\vartheta + 240^0), \end{cases}$$

wobei der Winkel ϑ mit den Coordinaten des Punktes P_1 durch die Relationen (16) verbunden ist.

Es ist ohne Weiteres klar, dass sämmtliche Formeln und Sätze, welche im vorhergehenden Abschnitt für das durch P' gehende System abgeleitet worden sind, auch für zwei durch P'' (x'', y'') und P''' (x''', y''') gehende Systeme gelten, sobald in denselben für x' und y' die Coordinaten x'' und y'' resp. x''' und y''', sowie für ϑ $\vartheta + 120^0$ resp. $\vartheta + 240^0$ gesetzt wird.

Die gewonnenen Resultate liefern folgenden Satz:

„Durch einen beliebigen Punkt P_1 einer Ellipse lassen sich im Allgemeinen drei Kegelschnittssysteme von der Beschaffenheit legen, dass sämmtliche Curven eines Systems die Ellipse in einem Punkt osculiren und die Axen aller Curven denen der Ellipse parallel sind. Bezeichnet man die excentrische Anomalie des Punktes P_0 mit -3ϑ, so erhält man die Anomalien der Berührungspunkte, wenn man in dem Ausdruck $\vartheta + \frac{2n\pi}{3}$ dem n der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2 beilegt.“

Um zu untersuchen, ob die Punkte P_1, P', P'', P''' auf irgend welchen bemerkenswerthen Kegelschnitten liegen, bilden wir die Gleichung

$$(19)\qquad \lambda S - LM = 0,$$

worin $S = 0$ die Gleichung der Ellipse (1), $L = 0$ und $M = 0$ die Gleichungen zweier durch die oben angeführten Punkte gehender Geraden sein sollen. Gl. (19) repräsentirt alsdann bekanntlich alle durch diese Punkte gehenden Kegelschnitte, von denen wir durch gehörige Bestimmung des λ die bemerkenswerthesten auswählen können.

Denken wir die Punkte bestimmt durch ihre in Gll. (16) und (18) angegebenen Anomalien, so erhalten wir für die Gleichungen der die Punkte P'' und P''', sowie P' und P_0 verbindenden Sehnen:

$$(20)\qquad \begin{cases} L = b\,x.\cos\vartheta + a\,y\sin\vartheta + \dfrac{a\,b}{2} = 0 \\ M = b\,x\cos\vartheta - a\,y\sin\vartheta - a\,b\cos 2\vartheta = 0 \end{cases}$$

Die Gleichung (9) lautet daher vollständig:

$$(21)\quad b^2(\lambda - \cos^2\vartheta)\,x^2 + a^2(\lambda + \sin^2\vartheta)\,y^2 + \frac{a\,b^2\cos 3\vartheta}{2}\,x + \frac{a^2 b\sin 3\vartheta}{2}\,y - a^2 b^2\left(\lambda - \frac{\cos 2\vartheta}{2}\right)^2 = 0,$$

woraus also für specielle Werthe von λ nicht nur der Steiner'sche Kreis, sondern auch die in der Einleitung erwähnte gleichseitige Hyperbel und noch andere Curven 2. O. erhalten werden können, wie dies weiter unten angegeben werden wird, nachdem zuvor *zwei allen diesen Kegelschnitten zukommende Eigenschaften* angeführt worden sind.

Da in Gl. (21) das Glied in x y fehlt, was davon herrührt, dass die Geraden (20) unter supplementären Winkeln gegen die Abscissenaxe geneigt sind, so haben wir den Satz

„Die Axen aller Kegelschnitte, welche sich durch die vier Punkte P_0, P', P'', P''' der Ellipse legen lassen, sind denen der Ellipse parallel."

Da ferner die Coefficienten von y und x in Gl (21) von λ unabhängig sind, so ist bei allen durch diese Gleichung repräsentirten Curven das Verhältnis dieser Coefficienten dasselbe, nämlich $= \frac{a}{b}\tan 3\vartheta$, oder $= \cot g\,\tau_0$, wenn τ_0 den Winkel der Tangente in P_0 mit der Abscissenaxe bedeutet. Nun wird aber jede durch $Dx + Ey = 0$ repräsentirte Sehne des in der allgemeinen Gleichung $Ax^2 + 2Bxy + \ldots = 0$ gegebenen Kegelschnitts im Anfangspunkt der Coordinaten halbirt. Die Gleichung dieser Sehne lautet in unserem Fall bei jedem der Kegelschnitte (21):

$$(22)\qquad y : x = -\tan\tau_0,$$

so dass wir folgenden Satz haben:

„Jeder durch die Punkte P_0, P', P'', P''' gehende Kegelschnitt schneidet auf dem der Tangente der Ellipse in P_0 in Bezug auf die X-Axe antiparallelen Durchmesser (22) der Ellipse gleiche Stücke vom Centrum aus ab."

Nachdem wir in diesen beiden Sätzen zwei allen Kegelschnitten der Gl. (21) zukommende Eigenschaften angegeben haben, wollen wir aus dieser Gleichung kurz einige specielle Curven herleiten.

Damit Gl. (21) einen *Kreis* repräsentire, muss

$$\lambda = -\frac{a^2 \sin^2\vartheta + b^2 \cos^2\vartheta}{c^2}$$

sein. Durch Einführung dieses Werthes in Gl. (21) erhalten wir *die Gleichung des Steiner'schen Kreises:*

$$(23) \quad x^2 + y^2 - \frac{c^2}{2a}\cos 3\vartheta . x - \frac{c^2}{2b}\sin 3\vartheta . y - \frac{e^2}{2} = 0,$$

worin c und e die schon früher angegebene Bedeutung haben. — Als die Gleichung der aus (21) hervorgehenden *gleichseitigen Hyperbel* erhalten wir:

$$(24) \quad x^2 - y^2 - \frac{e^2}{2a}\cos 3\vartheta . x - \frac{e^2}{2b}\sin 3\vartheta . y - \frac{c^2}{2} = 0.$$

Für die *Parabel*, deren Axe parallel der *Abscissenaxe* ist, muss $\lambda = \cos^2\vartheta$ sein. Die Gleichung dieser Parabel lautet alsdann:

$$(25) \quad y^2 + \frac{b^2 \cos 3\vartheta}{2a} x + \frac{b \sin 3\vartheta}{2} y - \frac{b^2}{2} = 0$$

Für die *Parabel*, deren Axe der *Ordinatenaxe* parallel ist, ist $\lambda = -\sin^2\vartheta$, und ihre Gleichung:

$$(26) \quad x^2 - \frac{a\cos 3\vartheta}{2} x - \frac{a^2 \sin 3\vartheta}{2b} . y + \frac{a^2}{2} = 0$$

Ausser dem Steiner'schen Kreis (23) haben wir somit noch drei bemerkenswerthe Kegelschnitte angegeben, auf welchen die Punkte P_0, P', P'', P''' liegen müssen.

Was diesen *Kreis* und die *gleichseitige Hyperbel* (24) betrifft, so lässt sich ein interessanter Satz über die Lage ihrer *Mittelpunkte* angeben.

Bezeichnen wir nämlich die Mittelpunktscoordinaten der drei Krümmungskreise in P', P'', P''' mit α', β'; α'', β''; α''', β''', so erhalten wir aus Gl. (10) für die Abscissen derselben die Werthe:

$$\alpha' = \frac{c^2}{a^4} x'^3, \quad \alpha'' = \frac{c^2}{a^4} x''^3, \quad \alpha''' = \frac{c^2}{a^4} x'''^3,$$

aus welchen folgt:

$$\alpha' + \alpha'' + \alpha''' = \frac{c^2}{a^4} (x'^3 + x''^3 + x'''^3),$$

was mit Rücksicht auf die Relationen (9):

$$x_0 = \frac{4x'^3}{a^2} - 3x' = \frac{4x''^3}{a^2} - 3x'' = \frac{4x'''^3}{a^2} - 3x'''$$

übergeht in:

$$\alpha' + \alpha'' + \alpha''' = \frac{3c^2}{4a^2} (x_0 + x' + x'' + x''').$$

Aus Gl. (18) ergibt sich aber durch Addition:

$$x' + x'' + x''' = 0,$$

somit haben wir:

$$\alpha' + \alpha'' + \alpha''' = \frac{3c^2}{4a^2} x_0$$

oder

$$\tfrac{1}{3}(\alpha' + \alpha'' + \alpha''') = \frac{c^2}{4a^2} x_0$$

Der linke Theil dieser Gleichung stellt aber bekanntlich die Schwerpunktsabscisse des von den Punkten α', β'; α'', β''; α''', β''' gebildeten Dreiecks dar, und der rechte Theil, dem wir auch die Gestalt $\frac{c^2}{4a} \cos 3\vartheta$ geben können, ist, wie aus Gl. (23) folgt, identisch mit dem Werth der Mittelpunktsabscisse des durch P', P'', P''', P_0 gehenden Kreises. Da sich Analoges von den Ordinaten nachweisen lässt, so haben wir den Satz:

> *„Der Schwerpunkt des Dreiecks, welches von den Centren der durch einen beliebigen Punkt P_0 einer Ellipse gelegten Krümmungskreise gebildet wird, fällt zusammen mit dem Centrum des durch die drei Berührungspunkte gehenden Kreises."*

Für den Schwerpunkt des Dreiecks, welches durch die drei Centren der die Ellipse in P', P'', P''' osculirenden gleichseitigen

Hyperbeln gebildet wird, erhalten wir auf eben dieselbe Weise, wie oben den Satz, dass dieser Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt der durch P′, P″, P‴, P_0 gehenden gleichseitigen Hyperbel zusammenfällt.

Mit Hülfe des Kreises (23), der wenn P_0 gegeben ist, leicht construirt werden kann, gelangt man zur geometrischen Construction der drei Berührungspunkte P′, P″, P‴, wodurch zugleich die Aufgabe gelöst ist, *mit Hülfe einer Ellipse und eines Kreises einen gegebenen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.*

III.

In Grunert's Archiv, Thl. 30. pag. 20, wird gezeigt, dass jedes der in eine Ellipse beschriebenen Dreiecke, für welche die Differenzen der Anomalien ihrer Ecken 120° betragen, ein Maximum, und ib. pag. 40, dass das in den Eckpunkten des ebengenannten Dreiecks der Ellipse umschriebene Dreieck ein Minimum ist. Da die angegebene Bedingung bei unserem Dreieck P′, P″, P‴ erfüllt ist, so ist obengenannter Satz unmittelbar auf dieses und das in den betreffenden Punkten der Ellipse umgeschriebene Dreieck anwendbar.

Es lässt sich leicht zeigen, das die Seiten des $\triangle$ P′ P″ P‴ zu den das Centrum O der Ellipse mit den gegenüber liegenden Ecken des Dreiecks verbindenden Sehnen conjugirt sind. Denn da nach dem Früheren

$$\tfrac{1}{3}(x' + x'' + x''') = 0 \text{ und } \tfrac{1}{3}(y' + y'' + y''') = 0$$

ist, so fällt der Schwerpunkt des $\triangle$ P′ P″ P‴ mit dem Coordinatenanfangspunkt, d. i. mit dem Centrum O der Ellipse zusammen. Demnach werden die Seiten dieses Dreiecks von den Verlängerungen der die Ecken mit dem Mittelpunkt der Ellipse verbindenden Geraden halbirt, sind also conjugirt zu denselben. Aus dieser Eigenschaft folgt, dass die Seiten des eingeschriebenen Dreiecks denen des umgeschriebenen parallel, dass also P′, P″, P‴ die respectiven Mittelpunkte der Seiten des Tangentendreiecks sind. Errichtet man daher in diesen Punkten auf den Seiten des umgeschriebenen Dreiecks Perpendikel, so schneiden sich dieselben

in einem Punkt H (x_h, y_h), welcher demgemäss der Mittelpunkt des dem umgeschriebenen Dreieck umschriebenen Kreises, der Durchschnittspunkt der Höhen des eingeschriebenen Dreiecks und der Durchschnittspunkt der Normalen der Ellipse in den Punkten P', P'', P''' ist.

Die Normalen der drei Osculationspunkte schneiden sich demnach in *einem* Punkt. Da aber von einem beliebigen Punkt aus im Allgemeinen vier Normalen an eine Ellipse gezogen werden können, so entsteht hier die Frage nach dem Fusspunkt der vierten von H ausgehenden Normale. Um die Coordinaten dieses Punktes, den wir mit P^{IV} (x^{IV}, y^{IV}) bezeichnen wollen, zu finden, ist es nöthig, die von H selbst zu kennen. Dieselben ergeben sich aus folgender Betrachtung. Der Mittelpunkt der Ellipse ist nach dem Obigen zugleich Schwerpunkt des $\triangle P' P'' P'''$. Als solcher muss er mit dem Höhenschnittpunkt H dieses Dreiecks und dem Mittelpunkt K (x_k, y_k) des demselben Dreieck umschriebenen Kreises (23) auf derselben Geraden liegen und zwar so, dass $\overline{OH} = -2\,\overline{OK}$ ist. Demnach sind vermöge der aus Gl. (23) sich ergebenden Werthe für x_k und y_k die Coordinaten von H:

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} x_h &= -2x_k = -\frac{c^2 \cdot \cos 3\vartheta}{2a} = -\frac{c^2 x_0}{2a^2} \\ y_h &= -2y_k = -\frac{c^2 \cdot \sin 3\vartheta}{2b} = \frac{c^2 y_0}{2b^2} \end{aligned}\right.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

$$c^2 x y = a^2 x_h y - b^2 y_h x$$

ein, welche Gleichung bekanntlich zusammen mit der Gleichung der Ellipse (1) die Coordinaten der Fusspunkte der von einem Punkt (x_h, y_h) auf die Ellipse gefällten Normalen liefert, so geht dieselbe über in:

$$(28)\qquad 2xy + x_0 y + y_0 x = 0.$$

Setzt man hierin für y den aus der Gleichung der Ellipse (1) folgenden Werth $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ein und entwickelt die ersten Glieder der Eliminationsgleichung, so folgt:

$$x^4 + x_0 x^3 + \ldots = 0$$

Drei der Wurzeln dieser Gleichung sind bekannt, nämlich x', x'', x'''. Zur Bestimmung der vierten Wurzel x^{IV} haben wir daher

$$x^{IV} + x' + x'' + x''' = -x_0,$$

oder, da

$$x' + x'' + x''' = 0$$

ist,

$$x^{IV} = -x_0$$

Ebenso folgt

$$y^{IV} = -y_0 \qquad (29)$$

Es geht daher die vierte von H ausgehende Normale durch den P_0 diamentral gegenüber liegenden Punkt P^{IV}.

Die zuletzt gewonnenen Resultate lassen sich zusammenfassen wie folgt:

> *„Die Berührungspunkte dreier sich in demselben Punkt einer Ellipse schneidenden Krümmungskreise dieser Curve bilden ein Dreieck, dessen Inhalt ein Maximum ist. Der Schwerpunkt dieses Dreiecks fällt zusammen mit dem Mittelpunkt der Ellipse. Die Höhen sind zugleich die in den Eckpunkten des Dreiecks errichteten Normalen der Ellipse, während die von ihrem Durchschnittspunkt ausgehende vierte Normale die Ellipse in einem Punkt trifft, welcher dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der drei Krümmungskreise diametral gegenüberliegt.“*

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass die vorliegenden Entwickelungen nur für die *Ellipse* gültig sind. Versucht man durch einen beliebigen Punkt einer *Hyperbel* Krümmungskreise an dieselbe zu legen, so erhält man zwar Werthe für ebenfalls *drei* Berührungspunkte, jedoch sind die Coordinaten nur eines derselben reell. Bei der *Parabel* lässt sich durch einen beliebigen Punkt derselben überhaupt nur *ein* Krümmungskreis legen, und zwar ist derselbe stets reell. Die Coordinaten x', y' seines Berührungspunktes haben, wenn x_0 und y_0 die des gegebenen Durchschnittspunktes bedeuten, die Werthe:

$$x' = {}^1/_9\, x_0$$
$$y' = -{}^1/_3\, y_0.$$